U.D.C 624.07

滑り支承を有する免震建物の応答解析法
—摩擦機構における時刻歴計算手法の検討—

伊丹　十夢*　　千葉　一樹*　　豊嶋　　学*

要　約：　免震層に摩擦装置を有する建物モデルの解析を行う中で，速度が反転する際に摩擦装置の荷重が不連続になる摩擦装置特有の特性が解析を行う上での課題として知られており，処理手法については既に多くの先行研究がある。本論文では，応答値を操作することなく処理する手法を提案した栗田らの手法[1]を参考に解析を行った。栗田らの手法[1]では摩擦装置が固着するまでの時間 Δt の算出過程で時間を戻す処理が必要となる事例を確認した。そこで本論文では，滑りから固着へ移行するタイミングの算出方法を再考することで，時間が進む処理のみで解析できる手法を提案した。提案した手法により時間を戻す処理を行わずに既往の論文と同じ精度での解析を行うことができた。

ｷｰﾜｰﾄﾞ：　滑り支承，ダンパー，固着，時刻歴応答解析，多質点応答解析

目　次：
1. はじめに
2. 応答解析法
3. 固着移行時の加速度変化
4. 改善手法の提案
5. 解析手法比較
6. まとめ

1. はじめに

剛滑り支承のような装置に作用する摩擦力は，図 1 のように速度に依存した復元力特性となる。摩擦装置の復元力特性は，作用する荷重が最大静摩擦力より小さく装置が停止している固着領域と荷重が最大静摩擦力を超えて装置が動いている滑り領域で構成される。図 1 の固着領域では，建物の層せん断力と釣り合う静摩擦力が作用する。層せん断力が最大静摩擦力を超えると摺動を始め滑り領域に移行し，動摩擦力の正負は速度の向きにより定まる。

固着領域について，静摩擦力と層せん断力の釣り合いを考慮しない場合，固着の前後において摩擦装置の荷重が急激に変化することで，図 2 のように加速度の反転現象が連続する不具合が生じる。また，免震層に剛滑り支承などの摩擦装置を使用する際は，固着時に免震層の相対加速度，相対速度，変位増分が 0 となることから運動方程式の自由度が 1 つ小さくなるため，滑り状態と同じ運動方程式を使い続けるには使用する運動方程式を状況に応じて使い分けるなどの工夫が必要となる。

既往の研究[1),2),3),4)]では，これらの問題を解決するために様々な検討が行われてきた。簡易的な手法としては，固着時は疑似的に大きな剛性を設けることでバイリニアとして連続的に解析する手法がある。この手法は，非常に小さな変形で大きく摩擦装置荷重が変化するため，精度を重視すると時間刻みを小さくしなければならない。その他に，固着と判定したステップでは免震層の速度及び加速度を 0 とする処理する手法がある[2)]。こちらも，計算結果を 0 に修正する作業を伴うため，解析精度については確認が必要となる。

二つの課題を解決するために栗田らの手法[1)]（以下，栗田法）がある。栗田らは，復元力装置や応答値を修正することなく解析する手法を提案している。滑りから固着へ移行するステップについて，固着となる加速度及び速度が 0 となる時間を算出し，状態に応じた解析手法としている。しかし，直前の応答値の条件により，固着する時間が，本来固着が発生するステップを超えた時間となる事象が発生する。この事象が発生すると，本来は時間が進むように解析している中で，時間が戻るように解析する処理が発生する。

改善手法として，応答計算における関係式から，摺動から固着に移行する際の時間の算出手法を検討し，時間が進

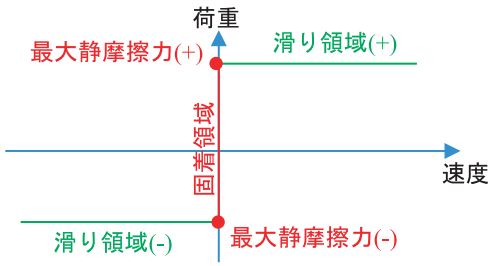

図 1　摩擦部材の荷重–速度関係

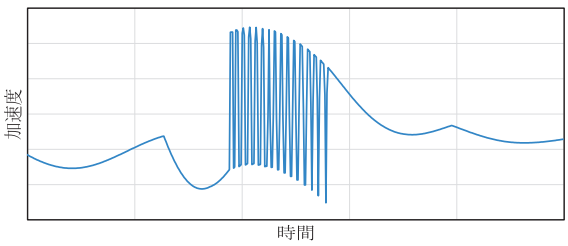

図 2　固着状態を表現できていない場合の波形例

＊技術研究所　振動・音響グループ

む処理のみとなる手法を提案し，既存の手法との比較を行った。

2. 応答解析法

栗田法について，概要を説明する。なお，運動方程式に用いる文字は図３のモデルを用いて説明する。

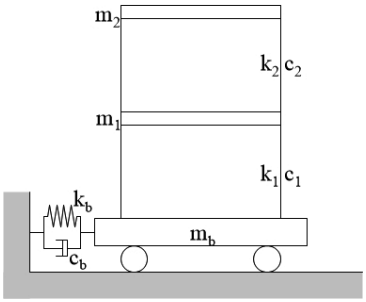

図３　応答解析モデル

2.1　摺動状況判定

免震層に摩擦装置を用いる際は，摩擦装置が滑っている状態と固着している状態がある。摩擦装置が固着から滑りに移行する条件は静摩擦力 T_s が最大静摩擦力 T_s^{max} を超えることである。

$$|T_s| > T_s^{max} \quad (1)$$

$$T_s = -m_b\ddot{u}_g - \{(c_b+c_1)\dot{u}_b - c_1\dot{u}_1 + (k_b+k_1)u_b - k_1u_1\} \quad (2)$$

ここに，m_i：質量，c_i：減衰係数，k_i：剛性，u：相対変位，$\dot{u}$：相対速度，$\ddot{u}_g$：入力加速度。

滑りから固着へ移項する条件は，免震層の相対速度 $\dot{u}_b$ が 0，かつ，静摩擦力 T_s が動摩擦力 T_d より小さいことである。

$$\dot{u}_b = 0 \text{ and } |T_s| < T_d \quad (3)$$

なお，速度が反転する際に，静摩擦力が動摩擦力を下回らない場合は固着することなく，摺動を続けると考えられる。

2.2　基本運動方程式

栗田法の解析の基本式は，一般的な運動方程式に摩擦装置を T_d として外力項とした式(４)で表される。なお，式(４)は摩擦装置が滑っている状態を表している。

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b+c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_b \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b+k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_b \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_d \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m_b \\ m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g \quad (4)$$

ここに，$\ddot{u}$：相対加速度。T_d は m_b に作用する動摩擦力であり，軸力 N と動摩擦係数 μ_d を用いて表される。

$$T_d = \mu_d N \mathrm{sgn}(\dot{u}_b) \quad (5)$$

$$N = (m_b + m_1 + m_2)g \quad (6)$$

2.3　固着時の運動方程式

摩擦装置が固着している場合，免震層は地盤と一体として動くため，相対速度 $\dot{u}_b$ と相対加速度 $\ddot{u}_b$ は 0 となる。この条件により，固着時の免震層の運動方程式は式(７)で表すことができる。なお，免震層が固着していることで，免震層の相対変位が変化しないことから摩擦力の項は無視できる。

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_b \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_b \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1\ddot{u}_g + c_1\dot{u}_b + k_1u_b \\ -m_2\ddot{u}_g \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式(７)は免震層での応答計算を不要とするため，第１層に関する減衰係数及び剛性の１列目の項を右辺へ移項している。β 法を増分法で計算する際，固着時は $\dot{u}_b = 0$，$\Delta u = 0$ であることから，移項した項は時間 $t_{(n+1)}$ において既知数として処理できる。式(４)及び(７)から，滑りもしくは固着状態が連続する場合はそれぞれの式の $t_{(n+1)}$ から $t_{(n)}$ の差分を取る増分法により処理することができる。

2.4　滑りから固着に移行する場合の応答解析

状態が維持される場合は解析できるため，状態が滑りから固着へ変化する時間 $t_{(n+\alpha)}$ を検討した。状態が変化する時間に関する応答値のイメージを図４に示す。時間 $t_{(n+\alpha)}$ は，状態が変化する時点では速度及び加速度が 0 gal となるので式(８)，(９)の関係式が成り立つ。

$$\dot{u}_b^{n+\alpha} = 0, \quad \ddot{u}_b^{n+\alpha} = 0 \quad (8)$$

$$\Delta\dot{u}_b = \dot{u}_b^{n+\alpha} - \dot{u}_b^n = -\dot{u}_b^n, \quad \Delta\ddot{n}_b = \ddot{u}_b^{n+\alpha} - \ddot{u}_b^n = -\ddot{u}_b^n \quad (9)$$

また，Newmark の β 法[5] の基本式より，速度の増分式は式(10)の通りである。

$$\Delta\dot{u}_b = \ddot{u}_b^n\Delta\bar{t} + \Delta\ddot{u}_b\Delta\bar{t}/2 \quad (10)$$

式(10)に式(９)を代入すると，固着するタイミングを表す $\Delta\bar{t}$ は式(11)となる。

$$\Delta\bar{t} = -2\dot{u}_b^n/\ddot{u}_b^n \quad (11)$$

式(11)より，$\Delta\bar{t}$ は一義に定められるようになり，収束に関する収束計算が不要であると提案している。

β 法の変位の増分式は式(12)である。

$$\Delta u_b = \dot{u}_b^n\Delta\bar{t} + \left(\ddot{u}_b^n/2 + \beta\Delta\ddot{u}_b\right)\Delta\bar{t}^2 \quad (12)$$

ここに，式(９)，(11)を代入すると式(13)となる。

$$\Delta u_b = -\beta\ddot{u}_b^n\Delta\bar{t}^2 \quad (13)$$

滑りから固着状態への移行を表すため，式(７)から式(４)を差し引き，式(９)，(13)を代入すると式(14)となる。

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta\ddot{u}_b \\ \Delta\ddot{u}_1 \\ \Delta\ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta\dot{u}_b \\ \Delta\dot{u}_1 \\ \Delta\dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta u_b \\ \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_b\ddot{u}_b^n \\ -m_1\Delta\ddot{u}_g - c_1\dot{u}_b^n - k_1\beta\ddot{u}_b^n\Delta\bar{t}^2 \\ -m_2\Delta\ddot{u}_g \end{Bmatrix} \quad (14)$$

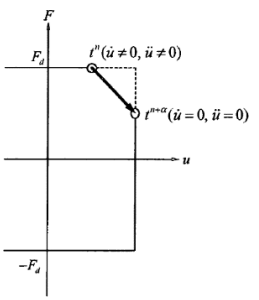

図４　応答解析モデル[1]

式(14)も全て既知数から算出することが可能である。なお，固着から滑りへ移るタイミングについては，固着時の応答値を初期値と考え，式(4)から計算する。

3. 固着移行時の時間推定手法

2.4 節にて，栗田法における固着判定時の時間推定手法を示した。しかし，栗田法を直接読み取ると固着直前の相対加速度を小さく評価してしまい，固着までの時間 $\Delta\bar{t}$ が時刻歴応答計算の時間刻み Δt を超えてしまう可能性がある。固着前後における免震層の相対加速度 $\ddot{u}_b$ の変化イメージ図を図 5 に示す。実挙動としては，$\ddot{u}_b$ は $t_{(n+\alpha)}$ にて固着する直前まではある値を有しており，$t_{(n+\alpha)}$ で固着すると 0 gal となる。一方で，栗田法では $t_{(n+\alpha)}$ での $\ddot{u}_b$ を 0 gal として $\Delta\bar{t}$ を算出するため，実挙動に対し，速度の変化量が小さくなり，$t_{(n+\alpha)}$ がやや遅れたタイミングとなる。この遅れが，大きくなると固着までの時間 $\Delta\bar{t}$ が Δt を超える事象が発生する。そのため $\Delta\bar{t}$ が Δt を超えた場合は，図 6 の青矢印の様に，$t_{(n+\alpha)}$～$t_{(n+1)}$ の解析時に超えた分の時間を遡る解析が必要となる。時間を遡る解析が必要になるということは，解析モデルが単純な線形モデルであれば問題無いが，複雑な復元力特性を有するモデルや質点が多いモデルを扱う場合に，各部材の剛性などの状態の判定が煩雑になるなど解析の複雑化を招く要因となる。そこで，4 章及び 5 章において，時間が進む方向のみで解析処理できる手法を検討した。

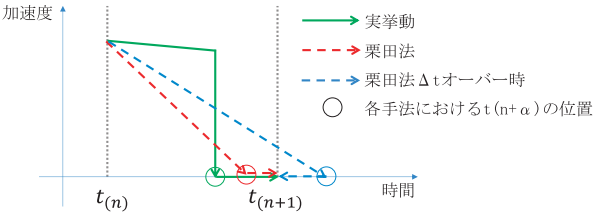

図 5　加速度変化のイメージ

4. 改善手法の提案

3 章で記したように，栗田法では $t_{(n+\alpha)}$ における $\ddot{u}_b$ を 0 として処理していたが，実際には直前まである加速度を有している。そこで，一旦 $\ddot{u}_b^{n+\alpha}$ がある加速度を有していると仮定することで速度が 0 となる時刻を算出する方法を検討した。

式(10)の β 法における速度の増分式より $t_{(n)}$～$t_{(n+\alpha)}$ まで関係式は式(15)となる。

$$\dot{u}_b^{n+\alpha}-\dot{u}_b^{n}=\ddot{u}_b^{n}\Delta\bar{t}+\frac{(\ddot{u}_b^{n+\alpha}-\ddot{u}_b^{n})\Delta\bar{t}}{2} \tag{15}$$

ここに，式(15)の $\dot{u}_b^{n+\alpha}$は 0 となる。

また，$t_{(n)}$～$t_{(n+1)}$ までは加速度と時間は線形関係であると仮定すると，$t_{(n+\alpha)}$ における免震層の加速度 $\ddot{u}_b^{n+\alpha}$ は式(16)となる。

$$\ddot{u}_b^{n+\alpha}=(\ddot{u}_b^{n+1}-\ddot{u}_b^{n})\Delta\bar{t}/\Delta t+\ddot{u}_b^{n} \tag{16}$$

式(16)の $\ddot{u}_b^{n}$を左辺に移行し(15)式に代入した式を整理すると式(17)を得る。

$$\frac{1}{2\Delta t}(\ddot{u}_b^{n+1}-\ddot{u}_b^{n})\Delta\bar{t}^2+\ddot{u}_b^{n}\Delta\bar{t}+\dot{u}_b^{n}=0 \tag{17}$$

式(17)より，$\ddot{u}_b^{n+\alpha}$ の値によらず，$\Delta\bar{t}$ を算出することが可能である。解の公式より $\Delta\bar{t}$ は二数が算出されるが，本報では，$\Delta\bar{t}$ は正の数かつ小さい値を採用するアルゴリズムとして解析した。

なお，本手法により解析を行う場合は，栗田法のように 1 ステップ内で滑りから固着へ移行する解析は発生しない。そのため，栗田法に基づく解析は固着が継続している場合の式(7)のみとなり，他のステップは基本的な β 法の理論式を適用する。

5. 手法によるの比較

5.1 解析概要

提案手法の妥当性の確認として栗田法を併せて解析した。解析モデルを図 6 に示す。解析条件は参考文献[2]と同様とし，摩擦係数を 0.1，内部減衰は Rayleigh 減衰で 1 次と 2 次の固有振動数に対して 5% とした。入力波形は図 7 に示す振幅 490 gal，周期 0.6 秒の正弦波であり，6 秒以降の入力は 0 gal とした。

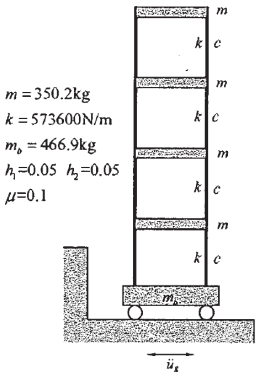

図 6　解析モデル[1]

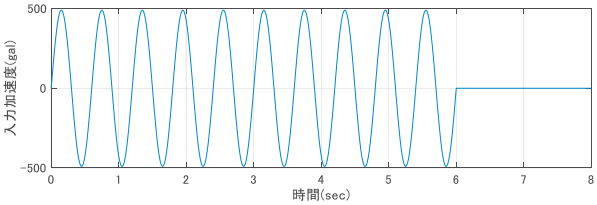

図 7　入力加速度

5.2 解析結果

時間刻み Δt を 0.001 秒として解析した結果の免震層における絶対加速度及び相対変位を図 8，9 に示す。絶対加速度，相対変位共に良い精度での一致が確認できた。一方で，Δt を 0.005 秒とした場合，図 10 のように変位量に差異が生じた。また，図 11 には Δt を変更した際の各残留変形値を示す。Δt が 0.001 秒辺りから残留変形が定常しており，栗田法，本手法ともに Δt は 0.001 秒以下が適していると考えられる。また，栗田法では，Δt が 0.01 秒の場合に極端に残留変形が大きくなっている。$\Delta\bar{t}$ の算出結果を確認したところ，$\Delta\bar{t}$ が負の値となるステップが発生していることを確認した。Δt が 0.005 秒以下の場合，$\Delta\bar{t}$ が負となる状況は存在していない。

6. まとめ

摩擦装置を含む解析について，既往の論文の再現解析を行った。その際に，時間を遡る処理が必要であったため，時間が進む処理のみとなるように手法を検討した。β 法の基本的な式をメインとして採用するような提案となるが，時間経過に沿った解析を実施することができ，時間刻み Δt が 0.001 秒以下の場合は，栗田法と概ね一致する結果を得られることを確認した。また，栗田法では時間刻みを大きくした場合に，速度が 0 となるまでの時間刻みが負の値として算出される例を確認した。

本検討では，単純な正弦波のみでの検討であるため，今後地震動などに適用するに辺り，事象の発生条件などについて追加の分析を実施する。また，処理するに当たり未知数が入ってしまうため手法が提案できていないが，固着から滑りに移行するタイミングについても今後の検討課題である。

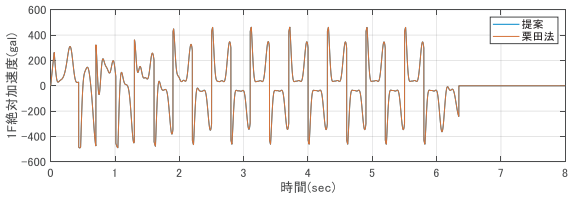

図 9　1F 絶対加速度（Δt＝0.001）

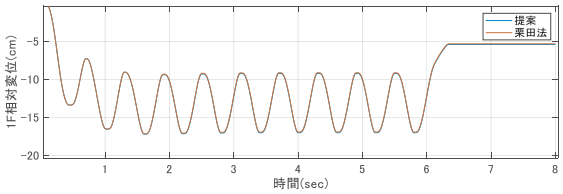

図 10　1F 相対変位（Δt＝0.001）

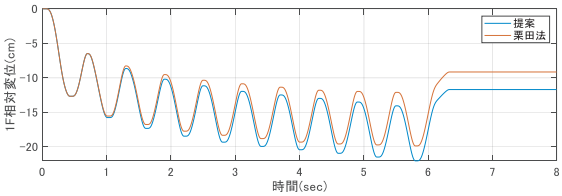

図 11　1F 相対変位（Δt＝0.005）

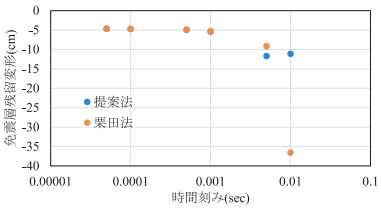

図 12　時間刻みによる免震層の残留変形量

参考文献

1）栗田哲，千葉大輔，他 1 名：剛滑り支承免震建物のせん断多質点系応答解析法，日本建築学会構造系論文集，第 574 号，69-76，2003 年 12 月
2）A. Vafai, M. Hamidi, 他 1 名：Numerical modeling of MDOF structures with sliding supports using rigid-plastic link, EARTHQUAKE ENGENEERING AND STRUCTURAL DYNAMICS, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2001 ; 30 : 27-42
3）高橋亜佑美，内田基城，他 2 名：すべり摩擦型振動の応答解析手法に関する研究，日本建築学会構造系論文集，第 674 号，657-664，2012 年 4 月
4）沢辺浩，栗田哲，他 1 名：剛滑り支承免震建物の地震応答解析法に関する基礎的研究，第 11 回 日本地震工学シンポジウム，1689-1694，2002 年
5）柴田明徳：最新耐震構造解析，p. 105，森北出版株式会社，2003 年 5 月

RESPONSE ANALYSIS METHOD FOR BUILDINGS WITH FRICTION DEVICES —EXAMINATION OF TIME HISTORY CALCULATION METHOD IN FRICTION MECHANISM—

T. Itami, K. Chiba, and M. Toyoshima

In analyzing a building model that has a friction device in the seismic isolation layer, a method for processing the characteristics peculiar to the friction device in which the load jumps when the speed reverses was raised as an issue. There are already many previous studies on this method. In this paper, the analysis was performed with reference to the Kurita method, which proposed a method for processing response values without correcting them. In the Kurita method, there is an issue that requires a process of returning the time in the process of calculating the time until the friction device is fixed. Therefore, in this paper, we proposed a method that can analyze only with processing that progresses over time. In the proposed method, an error occurred in the analysis results when the slip transitioned to sticking. Therefore, by forcibly correcting the response values, it was possible to analyze past papers with the same accuracy without having to return the time.